

## 水流流經植生坡面之流速分析

唐靖雅 謝平城\*

**摘要** 一般坡地上除了草地以外,尚有木本植物,因此模擬植生坡面上之薄層流(或稱為漫地流),需同時探討種植木本植物與草本植物之植生坡面,本研究依水深將流場劃分為兩層或三層,分別為植生層、土層兩層,或木本層、植生層和土層三層。木本層之控制方程式是以 Navier-Stokes 方程式加上木本植物對水流造成的阻力來描述;植生層與土層之控制方程式則以 Biot 孔彈性介質理論為基礎,依不同的植生狀態加以修正、無因次化和以半解析的方式針對垂直流速分佈進行求解。

**關鍵詞**: Biot 孔彈性介質理論、植生水流、流速分佈。

## Velocity Analysis of a Flow Passing over a Vegetated Slope

Ching-Ya Tang Ping-Cheng Hsieh\*

**ABSTRACT** A sheet flow or overland flow is simulated by the theory of laminar flow passing over a grassed slope with wood. The flow region is divided into two layers (vegetation layer & soil layer) or three layers (wood layer, vegetation layer & soil layer) according to the water depth. The Navier-Stokes equations are employed to govern the flow in the wood layer, and the Biot's theory of poro-elasticity is applied to delineate the flow in the vegetation and soil layers. These equations are simplified, modified and nondimensionalized under different vegetation situations, and then solved analytically. As a result, the velocity distributions are derived by a semi-analytical approach to understand the flow mechanism.

**Key Words** : Biot's theory of poro-elasticity, vegetation flow, velocity distribution.

### 一、前言

綜觀近年來的水土保持工程,不再是傳統硬性工法專美於前,兼具美觀與效能的生態工法也漸漸佔有一席之地。世界的環保意識抬頭,在做水土保持處理時會以順應自然、尊重自然的原則出發,盡量少用外來的材料,最好就地取材以保持當地的生態平衡。在穩定坡面方面,常使用打樁編柵、種子噴植或是坡面草溝排水等植生工法施作。日後,除了草皮之外,亦會有喬木或灌木生長。

植生水流之流況主要受到植物本身很大的影響,

而在 Wu (2007) 的研究中對於植物的性質提出分類,植物依照變形的難易度可分為柔性 (flexible) 或是剛性 (rigid),草本植物大多屬於柔性,例如:青草、禾本科植物等,而木本植物則被歸類為剛性,諸如:喬木、灌木等。但是同一種植物的不同部位或是生長時期的不同在變形的難易度上會有所不同,舉例來說:樹幹或是灌木通常是屬於剛性的,但它的枝葉則是柔性的,而幼樹容易受到外力而變形直到成熟以後才能抵抗外力。Järvelä (2002) 所進行之渠槽實驗是以自然草體、苔類與柳樹三種不同植生進行流體摩擦因子之分析,發現流體的阻力係數與以下三個因子有關 (1)

不同植生物種的相對粗糙度、(2) 不同種類植物混生狀態下的流速，以及 (3) 光禿的地表上種植無葉柳樹案例的水深。Chen & Kao (2011) 使用水蘊草進行水槽實驗，在高植生密度的狀態下，水流速度剖面會呈現 S 形分佈，而在接近底床的地方則有停滯的現象；在低密度植生狀態下的流速較快，植生對水流的影響也較薄弱。在分析植生水流的範疇中，主要以求得水流的流速分佈為目的，Chiu (1986) 曾表示：流速剖面是了解流況最關鍵的部分，流速剖面有助於計算流體之剪應力、二次流、擴散係數、流量、砂礫濃度等。因此，近來的研究都致力於建立一個簡單且實用的數學模式來預測植生水流的流速分佈和平均流速 (例如: Kubrak et al., 2008)。以往的研究不是考量柔性的草本就是剛性的木本。一般山坡地上的植被不完全是柔性的草本植物，經常也有灌木叢或是幾株喬木生長於其中，因此本文針對此類混合兩種不同植物特性的植生坡地進行水流分析，是此類研究中的先驅。

## 二、數學模式

考量水具黏滯性，且不可壓縮，以層流流場進行分析。流場假設已達穩態且為完全發展流。探討之坡面假設為無限寬，故僅考量垂直二維，可忽略側向之效應。在土層中忽略輸砂效應和流體與固體質量的耦合效應，並假設木本植物受水流作用後彎曲但不回復，因此忽略木本植物的速度。

### 1. 水淹過草高之流況

假設坡地水流深度高於草高，但不及木本植物高，因此將流場劃分為三層，其範圍和座標如圖 1 所示，其中第一層為水和木本植物混合層，簡稱為木本層；第二層為草本植物、木本植物與水交互層，簡稱為植生層；第三層為可滲透土層，簡稱為土層。

#### (1) 木本層之水流控制方程式

木本層之控制方程式可由 Navier-Stokes 方程式加上木本植物對水流所造成之阻力  $F_d$  修正，x 方向之控制方程式如 (1) 式所示，而單位面積之阻力公式可表示如 (2) 式：

$$\rho \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \rho g \sin \theta - \frac{\partial p_1}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) - F_d, \quad (1)$$

$$-\infty < x < \infty, h_2 \leq y \leq h_1 + h_2$$

$$F_d = \frac{1}{2} \rho C_w B m u_i^2 \quad (2)$$

其中， $u_1$ 、 $v_1$  分別為木本層之 x 方向與 y 方向流速， $t$  為時間， $p_1$  為木本層之水壓力， $\rho$  為水密度， $g$  為重力加速度， $\theta$  為坡度， $F_d$  為木本植物對水流所造成之阻力， $C_w$  為阻力係數， $B$  為每平方公尺坡面上之木本植物植株數。

由基本假設，可將 (1) 式整理成 (3) 式獲得木本層之 x 方向控制方程式：

$$0 = \rho g \sin \theta - \frac{\partial p_1}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u_1}{d^2 y} - F_d, \quad (3)$$

$$-\infty < x < \infty, h_2 \leq y \leq h_1 + h_2$$

而 y 方向之控制方程式則可表示為 (4) 式：

$$-\frac{\partial p_1}{\partial x} - \rho g \cos \theta = 0, \quad (4)$$

$$-\infty < x < \infty, h_2 \leq y \leq h_1 + h_2$$

#### (2) 植生層與土層之水流控制方程式

植生層和土層水流控制方程式係引用宋 (1993) 改寫 Biot (1956a,1956b,1962) 孔彈性介質理論，所建立之多孔介質層流模式中，描述孔隙流體運動之動量方程式：

$$(1-n)\rho_s \frac{\partial v_s}{\partial t} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_s + \frac{\mu n^2}{k_p} (v_f - v_s) \quad (5)$$

$$n\rho \frac{\partial v_f}{\partial t} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_f + \frac{\mu n^2}{k_p} (v_f - v_s) \quad (6)$$

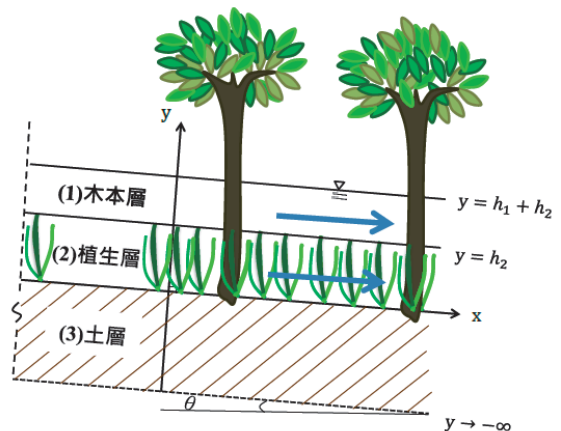


圖 1 木本層、植生層與土層三層示意圖

Fig.1 Definition sketch of woody layer, vegetation layer and soil layer

式中， $n$  為孔隙率， $\mu$  為動力黏滯係數， $\rho_s$  為固體的密度， $\underline{\underline{\sigma}}_s$  為固體的應力張量， $\underline{v}_s$  為固體移動速度， $\underline{v}_f$  為流體速度， $\rho$  為水密度， $\underline{\underline{\sigma}}_f$  為水的應力張量， $k_p$  為比滲透係數。

其中，

$$\underline{\underline{\sigma}}_s = \underline{\underline{\tau}}_s - (1-n)p\underline{I} \quad (7)$$

$$\underline{\underline{\tau}}_s = 2G\underline{e} + \lambda(\nabla \cdot \underline{d})\underline{I} \quad (8)$$

$$\underline{e} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{d} + (\nabla \underline{d})^T) \quad (9)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_f = -np\underline{I} + n\mu[\nabla \underline{v}_f + (\nabla \underline{v}_f)^T] \quad (10)$$

式中， $\underline{\underline{\tau}}_s$  表有效應力， $p$  為孔隙水壓力， $\underline{I}$  為單位矩陣， $G$ 、 $\lambda$  為 Lamé 彈性係數， $\underline{d}$  為固體的位移。

植生層之控制方程式在考量木本植物對水流所造成的阻力後，(5) 式與 (6) 式可改寫為：

$$(1-n)p_s \frac{\partial v_s}{\partial t} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_s + \frac{\mu n^2}{k_p} (v_f - v_s) \quad (11)$$

$$+ \frac{1}{2} \rho C_w B m^2 |v_f| v_f$$

$$np \frac{\partial v_f}{\partial t} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_f - \frac{\mu n^2}{k_p} (v_f - v_s) \quad (12)$$

$$- \frac{1}{2} \rho C_w B m^2 |v_f| v_f$$

再考慮重力項後，即可推導出植生層之流控制方程式，分為對植株之控制方程式與對水流之控制方程式，分別詳述如下：

#### ① 植生層中對植株之控制方程式

x 方向：

$$-(1-n_2) \frac{\partial p_2}{\partial x} + G \frac{\partial^2 d_x}{\partial y^2} + \frac{\mu n_2^2}{k_{p2}} u_2$$

$$+ \frac{1}{2} \rho C_w B m u_2^2 + (1-n_2) \rho_s g \sin \theta = 0, \quad (13)$$

$$-\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq h_2$$

y 方向：

$$(2G + \lambda) \frac{\partial^2 d_y}{\partial y^2} - (1-n_2) \frac{\partial p_2}{\partial y}$$

$$-(1-n_2) \rho_s g \cos \theta = 0, \quad (14)$$

$$-\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq h_2$$

式中， $n_2$  為木本層之孔隙率， $P_2$  為木本層之水壓力， $d_x$  為木本植物在 x 方向之位移量， $d_y$  為木本植物在 y 方向之位移量。(13) 式與 (14) 式可用來求解木本植物之位移量，但木本植物之位移量極微小且本研究之重點在於水流之水力分析，因此，本文不針對 (13) 式與 (14) 式對木本植物之位移量求解。

#### ② 植生層中對水流之控制方程式

x 方向：

$$-n_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} + n_2 \mu \frac{d^2 u_2}{dy^2} - \frac{\mu n_2^2}{k_{p2}} u_2$$

$$- \frac{1}{2} \rho C_w B u_2^2 + n_2 \rho g \sin \theta = 0, \quad (15)$$

$$-\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq h_2$$

y 方向：

$$-n_2 \frac{\partial p_2}{\partial y} - n_2 \rho g \cos \theta = 0, \quad (16)$$

$$-\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq h_2$$

而土層之水流控制方程式可由(6) 式在考慮重力作用之後，可表示為：

x 方向：

$$n_3 \mu \frac{d^2 u_3}{dy^2} - \frac{\mu n_3^2}{k_{p3}} u_3 - n_3 \frac{\partial p_3}{\partial x}$$

$$+ n_3 \rho g \sin \theta = 0, -\infty < x < \infty, 0 < y \leq 0 \quad (17)$$

y 方向：

$$-n_3 \frac{\partial p_3}{\partial y} - n_3 \rho g \cos \theta = 0, \quad (18)$$

$$-\infty < x < \infty, -\infty < y \leq 0$$

式中， $u_3$  為土層之流速， $n_3$  為土層之孔隙率， $P_3$  為土層之水壓力。

#### (3) 邊界條件

本研究之邊界條件分別位於自由水面處 ( $y = h_1 + h_2$ )、木本層與植生層交界面 ( $y = h_2$ )、地表面 ( $y = 0$ ) 與土層之無窮遠處 ( $y \rightarrow -\infty$ )，茲分別說明如下：

首先，將流體應力以張量表示如下：

$$\underline{\underline{\sigma}}_f =$$

$$\begin{bmatrix} -n_i p_i + 2n_i \mu \frac{\partial u_i}{\partial x} & n_i \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) \\ n_i \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) & -n_i p_i + 2n_i \mu \frac{\partial v_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (19)$$

因考慮均勻流，上式可改寫如下：

$$\underline{\underline{\sigma_{fi}}} = \begin{bmatrix} -n_i p_i & n_i \mu \frac{\partial u_i}{\partial y} \\ n_i \mu \frac{\partial u_i}{\partial y} & -n_i p_i \end{bmatrix} \quad (20)$$

式中，下標  $i=1,2,3$ ，分別代表木本層、植生層以及土層。

① 自由水面處 ( $y = h_1 + h_2$ )

由切線 (x) 方向流體應力連續，且在自由水面處剪應力為零，根據 (20) 式可知：

$$\sigma_{f_{x1}} = n_1 \mu \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, y = h_1 + h_2 \quad (21)$$

另外，法線 (y) 方向流體應力連續，且假設無風力及水波的作用下，大氣壓力為零 (以相對壓力計)，則根據 (20) 式表示如下：

$$\sigma_{f_{y1}} = -n_1 p_1 = 0, y = h_1 + h_2 \quad (22)$$

$$p_1 = 0, y = h_1 + h_2 \quad (23)$$

② 木本層植生層之交界面 ( $y = h_2$ )

由切線 (x) 方向流體應力連續，根據 (20) 式可知：

$$\frac{\sigma_{f_{x1}}}{n_1} = \frac{\sigma_{f_{x2}}}{n_2} \Rightarrow \mu \frac{du_1}{dy} = \mu \frac{du_2}{dy}, y = h_2 \quad (24)$$

再由切線 (x) 方向流體速度連續，可得：

$$n_1 u_1 = n_2 u_2, y = h_2 \quad (25)$$

另外，法線 (y) 方向流體應力連續，根據 (20) 式可知：

$$\frac{\sigma_{f_{y1}}}{n_1} = \frac{\sigma_{f_{y2}}}{n_2} \Rightarrow p_1 = p_2, y = h_2 \quad (26)$$

③ 地表面 ( $y=0$ )

由切線 (x) 方向流體應力連續，根據 (20) 式可知：

$$\frac{\sigma_{f_{x2}}}{n_2} = \frac{\sigma_{f_{x3}}}{n_3} \Rightarrow \mu \frac{du_2}{dy} = \mu \frac{du_3}{dy}, y = 0 \quad (27)$$

再由切線 (x) 方向流體速度連續，可得：

$$n_2 u_2 = n_3 u_3, y = 0 \quad (28)$$

另外，法線 (y) 方向流體應力連續，根據 (20) 式可知：

$$\frac{\sigma_{f_{y2}}}{n_2} = \frac{\sigma_{f_{y3}}}{n_3} \Rightarrow p_2 = p_3, y = 0 \quad (29)$$

④ 土層無窮遠處 ( $y \rightarrow -\infty$ )

切線 (x) 方向流體速度為零，可以表示為：

$$u_3 = 0, (y \rightarrow -\infty) \quad (30)$$

(4) 水壓力之解析解

首先由 (4) 式可解得木本層之水壓力通解：

$$P_1 = -\rho g \cos \theta y + f(x), \quad (31)$$

$$-\infty < x < \infty, h_2 \leq y \leq h_1 + h_2$$

將 (31) 式代入 (3) 式整理可以發現  $f(x)$  為  $x$  一次方函數或為常數，再配合邊界條件 (23) 式，即可求出木本層之水壓力分佈特解如下：

$$p_1 = \rho g \cos \theta (h_1 + h_2 - y), \quad (32)$$

$$-\infty < x < \infty, h_2 \leq y \leq h_1 + h_2$$

另外，植生層之水壓力分佈通解可由 (16) 式對  $y$  積分後得到：

$$p_2 = \rho g \cos \theta y + g(x), \quad (33)$$

$$-\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq h_2$$

將 (33) 式代回 (15) 式後發現可將  $g(x)$  視為常數，配合邊界條件 (26) 式後，可得植生層之水壓力分佈式如下：

$$p_2 = \rho g \cos \theta (h_1 + h_2 - y), \quad (34)$$

$$-\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq h_2$$

同理，可推得土層之水壓力分佈式如下：

$$p_3 = \rho g \cos \theta (h_1 + h_2 - y), \quad (35)$$

$$-\infty < x < \infty, -\infty \leq y \leq 0$$

(5) 無因次控制方程式

① 木本層之無因次水流控制方程式，令

$$y^* = \frac{y}{h_1 + h_2}, u_1^* = \frac{u_1}{u_{\max}}, u_{\max} = \frac{\rho g \cos \theta (h_1 + h_2)^2}{2\mu}$$

$$\text{, 以及 } \phi_1 = \frac{\rho^2 g C_w B m \sin \theta (h_1 + h_2)^4}{4\mu^2}, \text{ 其中 } u_{\max}$$

為傾斜裸露地薄層流水表面上之最大流速，藉由以上無因次參數可將 (3) 式簡化為：

$$\frac{d^2 u_1^{*2}}{dy^{*2}} - \phi_1 u_1^{*2} + 2 = 0, \quad (36)$$

$$-\infty < x < \infty, \frac{h_2}{h_1 + h_2} \leq y^* \leq 1$$

(36) 式即為木本層之無因次水流控制方程式。

② 植生層之無因次水流控制方程式，再令

$$u_2^* = \frac{u_2}{u_{\max}}, \phi_2 = \frac{\rho^2 g C_w B m \sin \theta (h_1 + h_2)^4}{4 \mu^2 n_2}, \text{ 與}$$

$$\delta_2 = \frac{n_2}{k_{p2}} (h_1 + h_2)^2 \text{ 藉由以上無因次參數，可}$$

將 (15) 式簡化為：

$$\frac{d^2 u_2^*}{dy^{*2}} - \delta_2 u_2^* - \phi_2 u_2^{*2} + 2 = 0, \quad (37)$$

$$-\infty < x < \infty, 0 \leq y^* \leq \frac{h_2}{h_1 + h_2}$$

(37) 式即為植生層之無因次水流控制方程式。

③ 土層之無因次水流控制方程式，令

$$u_3^* = \frac{u_3}{u_{\max}} \text{ 與 } \delta_3 = \frac{n^3}{k_{p3}} (h_1 + h_2)^2, \text{ 依以上無因}$$

次參數可將 (17) 式簡化為：

$$\frac{d^2 u_3^*}{dy^{*2}} - \delta_3 u_3^* + 2 = 0, \quad (38)$$

$$-\infty < x < \infty, -\infty < y^* \leq 0$$

(38) 式即為土層之無因次水流控制方程式。

(6) 無因次邊界條件

根據上節之無因次參數轉換，邊界條件亦可由有因次形式轉換為無因次形式，整理如下：

① 自由水面處 ( $y^* = 1$ )

由切線 (x) 方向流體應力連續，且在自由水面處剪應力為零，可得：

$$\frac{du_1^*}{dy^*} = 0, y^* = 1 \quad (39)$$

② 水層與草層之交界面 ( $y^* = \frac{h_2}{h_1 + h_2}$ )

由切線 (x) 方向流體應力連續：

$$\frac{du_1^*}{dy^*} = \frac{du_2^*}{dy^*}, y^* = \frac{h_2}{h_1 + h_2} \quad (40)$$

再由切線 (x) 方向流體速度連續：

$$n_1 u_1^* = n_2 u_2^*, y^* = \frac{h_2}{h_1 + h_2} \quad (41)$$

③ 地表面 ( $y^* = 0$ )

由切線 (x) 方向流體應力連續：

$$\frac{du_2^*}{dy^*} = \frac{du_3^*}{dy^*}, y^* = 0 \quad (42)$$

再由切線 (x) 方向流體速度連續：

$$n_2 u_2^* = n_3 u_3^*, y^* = 0 \quad (43)$$

④ 土層無窮遠處 ( $y^* = -\infty$ )

切線 (x) 方向流體速度為零，可以表示為：

$$u_3^* = 0, y^* \rightarrow -\infty \quad (44)$$

(7) 流速分佈之半解析解

首先，由木本層之無因次水流控制方程式 (36) 式進行降階之變數變換後，再將變數分離後積分即可得：

$$\frac{du_1^*}{dy^*} = \left( \frac{2\phi_1}{3} u_1^{*3} - 4u_1^* + C_1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (45)$$

式中， $C_1$  為積分常數。

假設水面之流速為  $u_{1s}^*$ ，將 (45) 式代入邊界條件 (21) 式，整理可得：

$$0 = \frac{2\phi_1}{3} u_{1s}^{*3} - 4u_{1s}^* + C_1 \quad (46)$$

即可求得積分常數  $C_1$ ，可表示為第 (47) 式：

$$C_1 = 4u_{1s}^* - \frac{2\phi_1}{3} u_{1s}^{*3} \quad (47)$$

同理，由植生層之無因次水流控制方程式 (37) 式對  $y$  積分可得：

$$\frac{du_2^*}{dy^*} = \left( \delta_2 u_2^{*2} + \frac{2\phi_2}{3} u_2^{*3} - 4u_2^* + C_2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (48)$$

式中， $C_2$  為積分常數。

而土層之流速則由 (38) 式求出流速通解可表示為：

$$u_3^* = C_3 e^{\sqrt{\delta_3} y^*} + C_4 e^{-\sqrt{\delta_3} y^*} + \frac{2}{\delta_3}, \quad (49)$$

$$-\infty < x < \infty, -\infty < y^* \leq 0$$

再將 (49) 式代入邊界條件 (44) 式，可得  $C_4 = 0$ ，因此土層之流速分佈可改寫為：

$$u_3^* = C_3 e^{\sqrt{\delta_3} y^*} + \frac{2}{\delta_3}, \quad (50)$$

$-\infty < x < \infty, -\infty < y^* \leq 0$

假設由植生層推算至木本層和植生層界面之流速為  $u_{2c}^*$ ，推算至地表面之流速為  $u_{20}^*$ 。因此可由邊界條件 (41) 式得到 (51) 式。

$$u_1^* = \frac{n_2}{n_1} u_{2c}^*, y^* = \frac{h_2}{h_1 + h_2} \quad (51)$$

將 (47) 式與 (51) 式代入 (45) 式後，邊界條件 (40) 式中等號左邊可改寫為：

$$\frac{du_1^*}{dy^*} = \left[ \frac{2\phi_1}{3} \left( \frac{n_2^3}{n_1^3} u_{2c}^{*3} - u_{1s}^{*3} \right) - 4 \left( \frac{n_2}{n_1} u_{2c}^* - u_{1s}^* \right) \right]^{\frac{1}{2}}, y^* = \frac{h_2}{h_1 + h_2} \quad (52)$$

而邊界條件 (40) 式中等號右邊可寫成：

$$\frac{du_2^*}{dy^*} = \left( \frac{2\phi_2}{3} u_{2c}^{*3} + \delta_2 u_{2c}^{*2} - 4u_{2c}^* + C_2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (53)$$

$$y^* = \frac{h_2}{h_1 + h_2}$$

將 (52) 式與 (53) 式代入 (40) 式中整理，即可推得  $C_2$ ：

$$C_2 = \frac{2}{3} \left[ u_{2c}^{*3} \left( \phi_1 \frac{n_2^3}{n_1^3} - \phi_2 \right) - \phi_1 u_{1s}^{*3} \right] - \delta_2 u_{2c}^{*2} - 4 \left[ \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) u_{2c}^* - u_{1s}^* \right] \quad (54)$$

另外，邊界條件 (43) 式可改寫為：

$$n_2 u_{20}^* = n_3 \left( C_3 + \frac{2}{\delta_3} \right), y^* = 0 \quad (55)$$

$$C_3 = \frac{n_2}{n_3} u_{20}^* - \frac{2}{\delta_3} \quad (56)$$

配合 (56) 式，邊界條件 (42) 式中等號右邊可改寫為：

$$\frac{du_3^*}{dy^*} \Big|_{y^*=0} = \sqrt{\delta_3} \left( \frac{n_2}{n_3} u_{20}^* - \frac{2}{\delta_3} \right), y^* = 0 \quad (57)$$

另外配合 (54) 式，邊界條件 (42) 式等號左邊可改寫為：

$$\frac{du_2^*}{dy^*} \Big|_{y^*=0} = \left\{ \frac{2\phi_2}{3} u_{20}^{*3} + \delta_2 u_{20}^{*2} - 4u_{20}^* + \frac{2}{3} \left[ u_{2c}^{*3} \left( \phi_1 \frac{n_2^3}{n_1^3} - \phi_2 \right) - \phi_1 u_{1s}^{*3} \right] - \delta_2 u_{2c}^{*2} - 4 \left[ \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) u_{2c}^* - u_{1s}^* \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (58)$$

將 (57) 式與 (58) 式代入 (42) 式整理得：

$$\frac{2}{3} \left[ \phi_2 u_{20}^{*3} + \left( \phi_1 \frac{n_2^3}{n_1^3} - \phi_2 \right) u_{2c}^{*3} - \phi_1 u_{1s}^{*3} \right] + \delta_2 u_{20}^{*2} - u_{2c}^{*2} - 4 \left[ u_{20}^* + \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) u_{2c}^* - u_{1s}^* \right] = \delta_3 \left( \frac{n_2^2}{n_3^2} u_{20}^{*2} - \frac{4n_2}{\delta_3 n_3} u_{20}^* + \frac{4}{\delta_3^2} \right), y^* = 0 \quad (59)$$

(47) 式代入 (45) 式後等號兩邊分別取定積分：

$$\int_{\frac{n_2 u_{2c}^*}{n_1}}^{u_{1s}^*} \left[ \frac{2}{3} \phi_1 (u_1^{*3} - u_{1s}^{*3}) - 4(u_1^* - u_{1s}^*) \right]^{\frac{1}{2}} du_1^* \quad (60)$$

$$\int_{\frac{h_2}{h_1+h_2}}^1 dy^* = \frac{h_1}{h_1+h_2}$$

(54) 式代入 (48) 式後等號兩邊分別取定積分：

$$\int_{u_{20}^*}^{u_{2c}^*} \left\{ \frac{2\phi_2}{3} u_2^{*3} + \delta_2 u_2^{*2} - 4u_2^* + \frac{2}{3} \left[ u_{2c}^{*3} \left( \phi_1 \frac{n_2^3}{n_1^3} - \phi_2 \right) - \phi_1 u_{1s}^{*3} \right] - \delta_2 u_{2c}^{*2} - 4 \left[ \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) u_{2c}^* - u_{1s}^* \right] \right\}^{\frac{1}{2}} du_2^* \quad (61)$$

$$= \int_0^{\frac{h_2}{h_1+h_2}} dy^* = \frac{h_2}{h_1+h_2}$$

式中， $u_{1s}^*$ 、 $u_{2c}^*$  與  $u_{20}^*$  為未知數，可由 (59) 式、(60) 式與 (61) 式以數值方法聯立求解。

## 2. 水深不及草高之流況

本節所分析之流況為水深不及草高與木本植物高，其示意圖如圖 2 所示，因此流場分為兩個區域，第二層為植生層，第三層為可透水土層。

## (1) 水深不及草高流況下之半解析解

藉由上一節之理論推導方式，即可獲得流速之半解析解為 (62) 式與 (64) 式：

$$\frac{du_2^*}{dy^*} = \left( \delta_2' u_2^{*2} + \frac{2\phi_2'}{3} u_2^{*3} - 4u_2^{*2} + C_1' \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (62)$$

$$-\infty < x < \infty, 0 < y^* \leq \frac{h_2}{h_1 + h_2}$$

其中，

$$C_1' = -\frac{2\phi_2'}{3} u_{2s}^{*3} - \delta_2' u_{2s}^{*2} + 4u_{2s}^* \quad (63)$$

$$u_3^* = C_2' e^{\sqrt{\delta_3'} y^*} + \frac{2}{\delta_3'}, \quad (64)$$

$$-\infty < x < \infty, -\infty < y^* \leq 0$$

其中，

$$C_2' = \frac{n_2 u_{20}^*}{n_3} - \frac{2}{\delta_3'} \quad (65)$$

將 (62) 式積分後可得關係式如下：

$$\int_{u_{20}^*}^{u_2^*} \frac{1}{\left[ \delta_2' (u_2^{*2} - u_{2s}^{*2}) + \frac{2\phi_2'}{3} (u_2^{*3} - u_{2s}^{*3}) - 4(u_2^* - u_{2s}^*) \right]^{\frac{1}{2}}} du_2^* = 1 \quad (66)$$

$$du_2^*, \int_0^1 dy^* = 1$$

式中，

$$\phi_2' = \frac{\rho^2 g C_w B m h_2^4 \sin \theta}{4\mu^2 n_2} \quad (67)$$

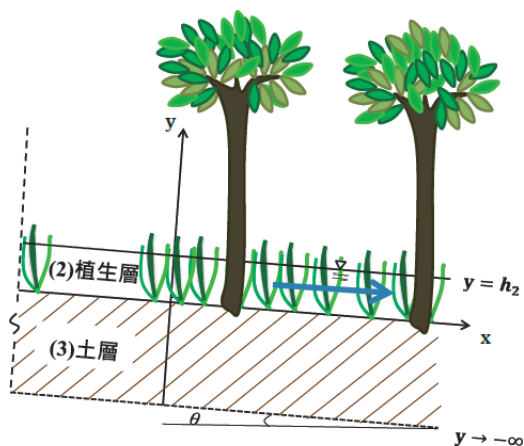


圖 2 植生層與土層二層示意圖

Fig.2 Definition sketch of vegetation layer and soil layer

$$u_2^* = \frac{u_2'}{\left( \frac{\rho g \sin \theta h_2^2}{2\mu} \right)} \quad (68)$$

其中， $u_2'$  為有因次之植生層流速， $u_2^*$  為無因次之植生層流速， $u_{2s}^*$  為水面流速， $u_{20}^*$  為由植生層所推算之地表流速。

$$\frac{2\phi_2'}{3} u_{20}^{*3} + \left( \delta_2' - \delta_3' \frac{n_2^2}{n_3^2} \right) u_{20}^{*2} + 4 \left( \frac{n_2}{n_3} - 1 \right) u_{20}^* - \frac{4}{\delta_3'} = \frac{2}{3} u_{2s}^{*3} + \delta_2' u_{2s}^{*2} - u_{2s}^* \quad (69)$$

其中，

$$\delta_2' = \frac{n_2}{k_{p2}} h_2^2 \quad (70)$$

$$\delta_3' = \frac{n_3}{k_{p3}} h_2^2 \quad (71)$$

式中， $u_{20}^*$  與  $u_{2s}^*$  為未知數，可由 (66) 式與 (69) 式以數值方法聯立求得。

### 三、結果與討論

#### 1. 流速分佈

在分析水理現象的範疇中，流速分佈是了解流況最關鍵的部分，因此本節依兩種不同水深案例別加以繪圖、討論。

植生層之比滲透係數是草體孔隙率和植株莖剖面直徑之函數，可由 Kaviany (1991) 所提出之關係式獲得：

$$k_{p2} = \frac{n_2^3 \times d_c^2}{80 \times (1 - n_2)^2} \quad (72)$$

式中， $d_c$  為草體的莖剖面直徑。

#### (1) 水深淹過草高之流速分佈

經由上一節的理論推導，最後得到三個分別位於水面、木本層與植生層交界面以及地表面之流速。在此引用精度較高之數值方法—高斯積分式 (Gauss quadrature) 如 (73) 式，式中  $f_j = f(t_j)$ ，先決定  $n$  值， $n$  值為用來控制精度的參數，精度為  $2n-1$  階， $A_j$  與  $t_j$  可查表而得，使用變數變換將積分上、下限固定在 -1 至 1 之區間，由此可

將積分式化為多項式。本研究使用  $n=3$  之精度運算，由上述三條多項式配合數值方法可求得水面、木本層與植生層交界面與地表面之流速，再將求得之流速代入 (60) 與 (61) 式，並將其化為高斯積分式，進而求出整個垂直流速剖面。

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx \sum_{j=1}^n A_j f_j \quad (73)$$

首先，由草本植株之密度對於水流之影響進行探討，所探討之草本植物為假儉草，根據楊 (2007) 的碩士論文，研究指出假儉草草體的剖面直徑為 0.003m，而本研究所探討之木本植物為莖剖面直徑為 0.1 公尺之幼樹。計算阻力係數係引用 Wu (2007) 提出用於群組木本植物的阻力係數公式，如 (74) 式，與木本植物的排列方式有直接的關係。

$$C_w = \left( 1 + 1.9 \times \frac{1.9B \times C_{d0}}{\ln} \right) \times \left[ 0.2025 \left( \frac{ls}{B} \right)^{0.46 \times C_{d0}} \right] + \frac{2 \ln}{\ln - B} - 2 \quad (74)$$

式中， $B$  為木本植物之莖剖面直徑； $C_{d0}$  為單一木本植物之阻力係數，建議值為 1.1； $\ln$  與  $ls$  分別為木本植物間之橫向與縱向間距。

不同假儉草密度之流速分佈如圖 3 所示，其中之木本植物配置圖表示如圖 4，圖 4 為每平方公尺面積上種植 4 株木本植物，且橫向距離與縱向距離皆為 0.5m，圖 3 中三角形符號曲線為無種植草本植物、只種植木本植物的情況，其它曲線則為種植 3000 株至 9000 株不等之假儉草與 4 株木本植物。由圖 3 可知隨著植生層中草本植物數量的增加，植生層與木本層的流速皆受到影響而降低。草本植物對於水流速度的影響可由各流速曲線對於未種植草本植物之流速曲線（三角形符號）的差值得知，在植生層中間的差異為最顯著，水面上的流速差異較不明顯，而在地表面上之流速呈現極微小的差異，因此草本植物對於水流速度的影響在植生層中央最大，木本層為其次，而在土層中則影響最小。未種植草本植物的曲線（三角形符號）呈現平滑的弧線，而其它有種植草本植物的曲線則隨著孔隙率的下降而漸漸有反曲點的現象出現。

再由不同木本植物排列配置來觀察水流受阻力之影響，圖 5 為每平方公尺之坡面上種植

3000 株假儉草與 8 株木本植物之流速分佈，而木本植物則依照圖 6 的排列設置，圖 5 中各案例的水面流速、木本/植生交界面流速與地表流速以及阻力係數則列於表 1 之中，由流速剖面圖可知木本植物施於水流最大的阻力情況為圖 6(d) 之配置，而阻力最小的為圖 6(a)，由表 1 可知在圖 6(a) 配置下的水面流速約為圖 6(d) 配置的 3 倍，而阻力係數  $C_w$  相差近 10 倍。另外，圖 6(b) 與圖 6(c) 配置下的流速分佈則非常接近，圖 6(b) 配置的流速稍大於圖 6(c) 的配置。表 1 也顯示出當木本植物間的橫向距離與縱向距離的比值越大時，流速則越大、阻力係數則越小。由此推論，若應用在水土保持工程中使用木本植物減低坡面水流流速時，使用圖 6(d) 方可達到最高效率，但此種排列不僅不美觀且對植物生長空間有所限制，因此建議考量採用圖 6(b) 或 6(c) 之排列方式。

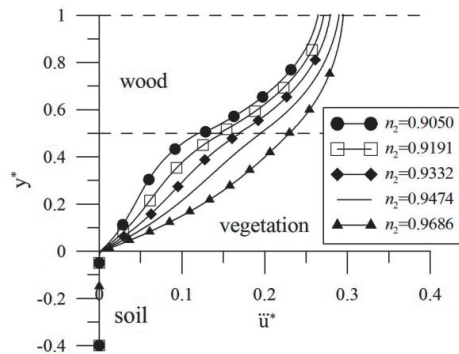


圖 3 水深淹過草高時不同假儉草密度之流速分佈 ( $h_1 = h_2 = 0.01m, s = 0.0001, \ln = ls = 0.5m$ )

Fig.3 Velocity distributions with varied density of centipede grass in submerged condition ( $h_1 = h_2 = 0.01m, s = 0.0001, \ln = ls = 0.5m$ )

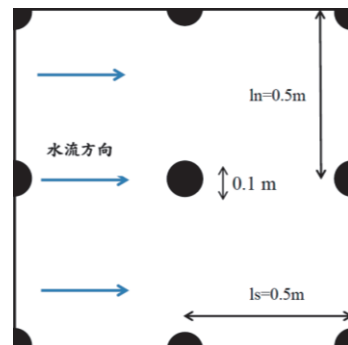


圖 4 木本植物之排列配置圖 A

Fig.4 Illustration of woody plants arrangement A



(2) 水深不及草高之流速分佈

使用數值積分，配合一般試誤法迭代即可聯立 (66) 與 (69) 式求解得  $u_{20}^*$  與  $u_{2s}^*$ ，之後再將該二流速代入 (66) 式使用數值積分法求得此流速所對應之位置，由此方法即可將完整之流速剖面繪出。

圖 7 為不同假儉草植株數之流速分佈，實線為無種植草本植物僅種植四株木本植物的狀況，其他曲線皆同時種植木本與草本植物。圖中描述的各案例，水深為 0.018m、坡度為 0.001，其他詳細參數則列於表 2 中，表中  $m'$  為假儉草在每方公尺面積上的株數， $m$  為每方公尺面積上木本植物之數量， $u_{20}^*$  和  $u_{2s}^*$  為位於地表面與水面之無因次流速。在計算比滲透係數時，除了無種植草本植物的案例中  $d_c$  使用 0.1m (木本植物之莖剖面直徑) 其他案例的  $d_c$  皆使用 0.003m (假儉草之莖剖面直徑)。由圖 7 觀察可知流速的變化量在植生層上半部較在植生層下半部緩，當草

之密度越大、孔隙率越小時流速較容易趨緩，並且其流速分佈在接近底床部分之速度梯度皆較大，而越靠近水面之流速梯度則越小，此流速分佈特性與均勻流流況更相近。

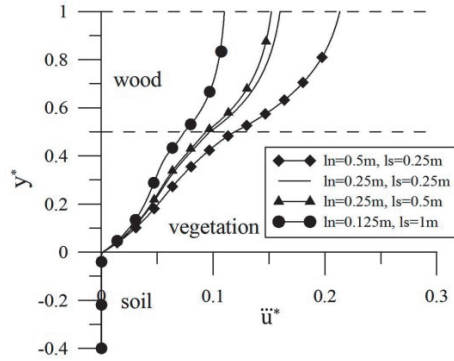


圖 5 不同木本植物排列配置之流速分佈 ( $h_1=h_2=0.01m, s=0.0001, n_1=0.9764, n_2=0.93167$ )  
**Fig.5 Velocity distributions with varied arrangement of woody plants ( $h_1=h_2=0.01m, s=0.0001, n_1=0.9764, n_2=0.93167$ )**

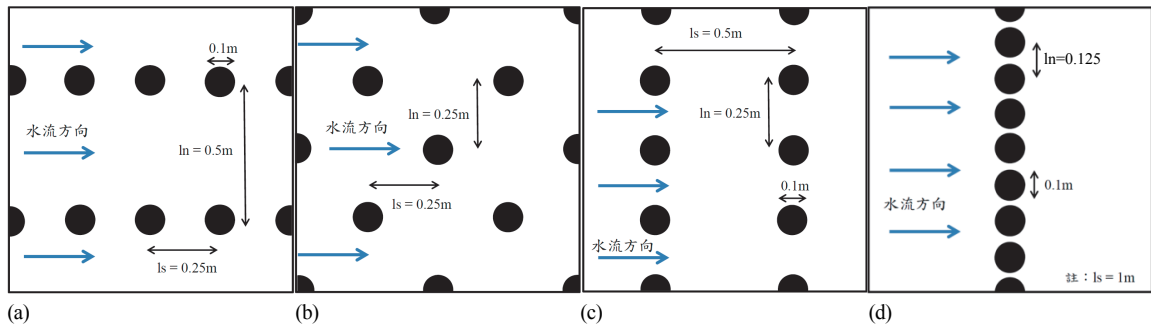


圖 6 木本植物之排列配置圖 B (a)  $ln=0.5m, ls=0.25m$  (b)  $ln=ls=0.25m$  (c)  $ln=0.25m, ls=0.5m$  (d)  $ln=0.125m, ls=1m$   
**Fig.6 Illustration of woody plants arrangement B (a)  $ln=0.5m, ls=0.25m$  (b)  $ln=ls=0.25m$  (c)  $ln=0.25m, ls=0.5m$  (d)  $ln=0.125m, ls=0.5m$  (d)  $ln=0.125m, ls=1m$**

表 1 不同木本植物排列配置之各項參數

**Table 1 Parameters for various woody plants arrangement**

| 案例  | $ln/ls$ | $u_{1s}^*$ | $u_{2c}^*$ | $u_{20}^*$ | $C_w$  |
|-----|---------|------------|------------|------------|--------|
| (a) | 2       | 0.2276741  | 0.1302958  | 0.0015915  | 0.9814 |
| (b) | 1       | 0.1706176  | 0.1058532  | 0.0014975  | 1.9567 |
| (c) | 1/2     | 0.1623486  | 0.1021571  | 0.0014809  | 2.1907 |
| (d) | 1/8     | 0.1174875  | 0.0810461  | 0.0013720  | 9.7165 |

表 2 水深不及草高時不同植生層之參數

**Table 2 Parameters for vegetation layer in emergent condition**

| 案例  | $m'$  | $m$ | $n_2$  | $k_{p2}$ ( $m^2$ )    | $u_{20}^*$ | $u_{2s}^*$ |
|-----|-------|-----|--------|-----------------------|------------|------------|
| —   | 0     | 4   | 0.9686 | 0.1151                | 0.0029     | 0.1261     |
| ◆—◆ | 2500  | 4   | 0.9509 | $4.01 \times 10^{-5}$ | 0.0023     | 0.0984     |
| □—□ | 5000  | 4   | 0.9332 | $2.05 \times 10^{-5}$ | 0.0020     | 0.0795     |
| ●—● | 10000 | 4   | 0.8979 | $7.81 \times 10^{-6}$ | 0.0015     | 0.046      |

至於坡度對於流況之影響如圖 8 所示，圖中所有案例每平方公尺坡面上皆種植 5000 株假儉草，水深皆控制在 0.018m，惟改變底床坡度進行研究。由於無因次之流速基底會隨著坡度的增加而遞增，因此將各坡度的流速分佈乘以各流速基底即可得到圖 8，該圖為一有因次的流速分佈圖。底床坡度越大時，流速分佈也越大。在  $s=0.01$ 、 $s=0.001$  與  $s=0.0001$  的坡度下，水面流速分別約為 0.5(m/s)、0.1(m/s) 與 0.02(m/s)，因此可推論：在此植生密度布設下，當坡度增加 10 倍時，水面流速大約增加為原來的 5 倍。

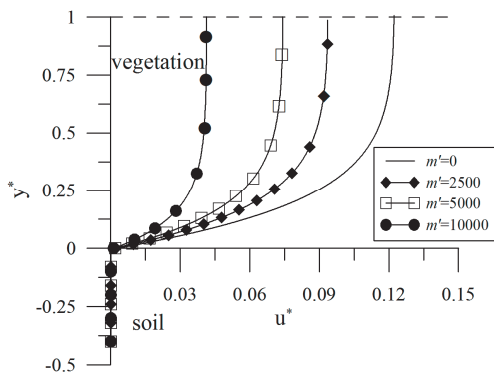


圖 7 水深不及草高時不同假儉草密度之流速分佈 ( $h_2=0.018\text{m}$ ,  $s=0.001$ )

Fig.7 Velocity profiles with varied density of centipede grass in emergent condition ( $h_2=0.018\text{m}$ ,  $s=0.001$ )

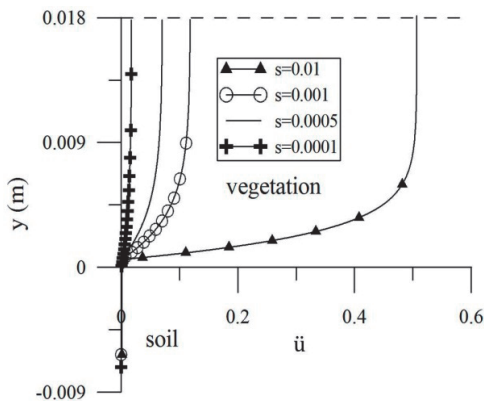


圖 8 水深不及草高時不同坡度流速分佈 ( $m'=5000$ ,  $n_2=0.9332$ ,  $h_2=0.018\text{m}$ )

Fig.8 Velocity profiles with different slope in emergent condition ( $m'=5000$ ,  $n_2=0.9332$ ,  $h_2=0.018\text{m}$ )

## 結 論

本研究呈現以孔隙介質流理論為主軸，佐以解析方法分析水流流經草本及木本植生坡面水理現象之研究，藉著假設合理之條件，並將控制方程式與邊界條件無因次化，以精簡演算過程，求得一個簡單、有效之數學模式來計算流速分佈，整理後分別歸納出下列之成果：

### 1. 水深淹過草高之流況

- (1) 在固定木本植株數下改變草之疏密度，由流速分佈圖可發現草對於水流流速的影響在植生層中央最大，木本層為其次，而在土層中則影響最小。
- (2) 探討木本植物排列配置對於流速分佈的影響時，發現當木本植物間的橫向距離與縱向距離的比值越大時，流速則越大、阻力係數則越小。

### 2. 水深不及草高之流況

- (1) 在固定木本植株數下，當草之密度越大、孔隙率越小時，流速較容易趨緩，並且其流速分佈在接近底床部分之速度梯度皆較大，而越靠近水面之流速梯度則越小，此流速分佈之特性與均勻流流況更相近。
- (2) 當坡地水流流速越大時（如坡度變大或草皮較稀疏），經種植木本植物後，水流所受阻力便越大，而木本植物對流速分佈的削減效應也就越大。

## 參考文獻

- [1] 宋長虹 (1993), 「水波作用下多孔彈性底床動力反應之研究」, 博士論文, 台灣大學土木工程學研究所, 台北。(Song, C.H. (1993). Dynamic response of water waves on a poroelastic bed, doctoral dissertation, Department of Civil Engineering, National Taiwan University, Taipei, Taiwan. (in Chinese))
- [2] 楊山慶 (2007), 「草溝設計水理實驗之研究」, 碩士論文, 中興大學水土保持學研究所, 台中。(Yang, S. C. (2007). Study on hydraulic experiments in grassed channel design, master thesis, Soil and Water Conservation Department of National Chung-Hsing University, Taichung, Taiwan. (in Chinese))

- [3] Biot, M.A., 1956a, "Theory of propagation elastic waves in a fluid saturated porous solid. I. low-frequency range." *Journal of Acoustical society of America*, 28, 168-178.
- [4] Biot, M.A., 1956b, "Theory of propagation elastic waves in a fluid saturated porous solid. II. high-frequency range." *Journal of Acoustical society of America*, 28, 179-191.
- [5] Biot, M.A., 1962, "Mechanics of Deformation and acoustic propagation in porous media." *Journal of Physics*, 33(4), 1482-1498.
- [6] Chen, Y. C. and S. P. Kao, 2011, "Velocity distribution in open channels with submerged aquatic plant." *Hydrological Processes*, 25, 2009-2017.
- [7] Chiu, C. L., 1986, "Entropy and probability concepts in hydraulics." *Journal of Hydraulic Engineering*, 113(5), 583-600.
- [8] Järvelä, J., 2002, "Flow resistance of flexible and stiff vegetation: a flume study with natural plants." *Journal of Hydrology*, 269, 44-4.
- [9] Kaviani, M., 1991, *Principles of heat transfer in porous media*, Springer, Berlin.
- [10] Kubrak, E., J. Kubrak and P. M. Rowiński, 2008, "Vertical velocity distributions through and above submerged, flexible vegetation." *Hydrological Sciences Journal*, 53(4), 905-920.
- [11] Wu W., 2007, "Effects of vegetation on flow and sediment transport." in *Computational River Dynamics*. Taylor & Francis e-Library.

---

2013 年 03 月 19 日 收稿

2013 年 04 月 22 日 修正

2013 年 05 月 16 日 接受

(本文開放討論至 2014 年 3 月 31 日)