

# 梁柱元素與質點法於動力分析中之接觸演算法

林昱廷 楊文嘉\*

**摘要** 質點法在土石流等模擬中表現優異，但在包含結構物時，因針對連續體設置的網格尺寸對於結構構件過於粗糙，故難以準確評估其應力。本研究引入梁柱元素以提升應力計算的準確性。梁柱元素與質點法透過兩階段接觸演算法實現互動：第一步將梁柱元素視為質點法的速度邊界條件以求得節點邊界力，第二步利用節點邊界力更新梁柱元素與質點法粒子的運動狀態。數值試驗結果顯示，引入梁柱元素能提高桿件撓曲應力場的精準度，並增加計算效率。

**關鍵詞**：質點法、梁柱元素、接觸演算法、梁理論

## Contact Algorithm for Material Point Method With Beam-Column Elements

Yu-Ting Lin Wen-Chia Yang\*

**ABSTRACT** The Material Point Method (MPM) performs well in simulating large deformations of continua, such as debris flows. However, when structural components are involved in simulations, the grid sizes of the simulated continua are often overly coarse relative to the structural elements, which increases the difficulty of accurately assessing the internal stresses of the structural members. Thus, this study introduces beam-column elements into the MPM, leveraging beam theory to improve the accuracy of stress calculations. The beam-column elements and the MPM are integrated using a two-stage contact algorithm. In the first stage, the beam-column elements are treated as velocity boundary conditions in the MPM to obtain nodal boundary forces, and in the second stage, these forces are used to update the states of both the beam-column elements and the MPM-simulated continua. Numerical experiments reveal that although the proposed projection-point-searching algorithm is less efficient under large displacements, the use of beam-column elements can prevent shear locking and enhance the accuracy of the internal flexural stress field of the structural members in MPM simulations. Moreover, simulations involving beam-column elements are significantly more efficient than particle-based simulations of structural members.

**Key Words:** Material point method, beam-column elements, contact algorithm, beam theory.

### 一、緒 論

台灣山形陡峭、地震頻繁，加之極端氣候下暴雨沖刷，導致邊坡滑動和土石流等自然災害頻繁發生，對生活安全和經濟活動構成了重大威脅。因此，開發有效的防災措施和災後處理策略，對於降低這些自然災害的影響至關重要。針對此問題，當前係以現場調查和監測為主，但由於受到地形和氣候因素的限制，往往難以獲得完整的數據，故需要有效的數值模擬方法來填補這一空白。

質點法 (Material Point Method, MPM) 自 Sulsky 等人於 1995 年提出以來，已被廣泛應用於模擬大變形和大位移的彈塑性連續體運動問題，尤其是在邊坡崩塌和土石流的動態行為研究中展示了其獨特的優勢。眾多學者如楊國鑫等 (2023)、賴宜群 (2020)、Abe and Konagai (2016)、Ng et al. (2023) 和 Yerro (2015) 的研究都證明了質點法在預測土石流和滑坡動態趨勢方面的有效性。

然而，若欲進一步探討建築物、橋梁結構和鋼構造防砂壩(林德貴等, 2023)等人造建物在土石流作用下的受力反應以及梁柱桿件設計需求時，單純使用質點法將略顯不足。主要原因為結構物中梁柱斷面尺寸遠小於問題的尺度，依據土體建置之計算網格，對於梁柱斷面來說過於粗糙，故無法準確的評估結構物的梁柱桿件內力。為了改善此問題，本研究將有限元素法中的梁柱元素 (beam-column element) 導入質點法的模擬中，借助梁柱元素具計算效率和分析精準度的優點，提高質點法於工程應用的可靠性。

本研究基於 Yang (2016) 提出的質點法邊界模擬技巧，將梁柱元素在每一分析步中視為計算網格之速度邊界，並於每一分析步結束前，與質點法之粒子同時進行位移與變形的更新，屬兩階段式的接觸演算法。本文將先介紹質點法以及 Yang (2016) 之邊界模擬技巧，其次將敘述本研究新提出之接觸演算法，並通過梁之動力反應問題進行數值驗證，文末將總結本研究之發現。

## 二、質點法

質點法 (Material Point Method, MPM) 係 Sulsky 等人 (1995) 將用於流體力學模擬的 FLIP (Brackbill et al., 1988) 延伸至固體力學應用之數值方法。此法使用粒子 (particle) 記錄與追蹤物體當前的材料狀態、位置、速度等資訊, 並利用拉格朗日 (Lagrangian) 網格計算物體下一分析步的狀態。如圖 1 所示, 質點法每一步的計算流程包含四個步驟: (1) 將粒子所攜帶的訊息投射至網格節點上; (2) 於網格上計算節點速度與位置之改變量; (3) 透過內插將運動、變形之更新資訊傳回至粒子; (4) 更新粒子狀態並依照需求重置網格。本節將介紹質點法所採用的物體運動控制方程式, 及其演算法。

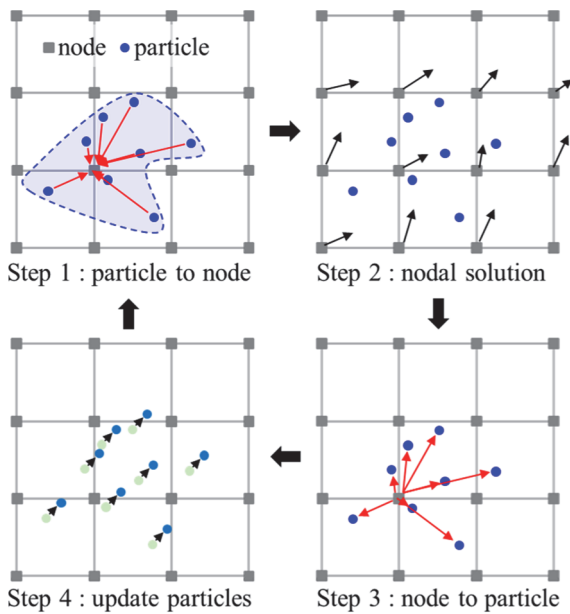


圖 1 質點法於每一步更新的計算流程

Fig.1 Updating procedure in a single analysis step

### 1. 控制方程式

質點法係以柯西 (Cauchy) 運動方程式描述連續體  $\Omega$  的運動與變形:

$$\rho \mathbf{a} = \text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (1)$$

其中,  $\rho(\mathbf{x}, t)$  為質量密度 (mass density)、 $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  為加速度向量、 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  為柯西應力張量 (Cauchy stress tensor) 以及  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  為比物體力 (specific body force)。 $\mathbf{x}$  為當前時間  $t$  的位置。連續體  $\Omega$  的邊界條件包含速度邊界條件:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t) \quad \text{for } \mathbf{x} \in \partial\Omega_v \quad (2)$$

和表面力 (traction) 邊界條件 (即工程領域之應力邊界條件):

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}^*(\mathbf{x}, t) \quad \text{for } \mathbf{x} \in \partial\Omega_\tau \quad (3)$$

其中  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  為速度向量,  $\mathbf{n}$  為連續體  $\Omega$  邊界  $\partial\Omega$  之向外法向量。 $\partial\Omega_v$  與  $\partial\Omega_\tau$  皆為  $\partial\Omega$  之一部分。在邊界上, 亦或定義有速度邊界條件  $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$ 、亦或定義有表面力邊界條件  $\boldsymbol{\tau}^*(\mathbf{x}, t)$ , 以數學表示為:  $\partial\Omega_v \cup \partial\Omega_\tau = \partial\Omega$  且  $\partial\Omega_v \cap \partial\Omega_\tau = \emptyset$ , 此處  $\emptyset$  代表空集合。

### 2. 質點法演算法

質點法之計算網格以節點速度與加速度之內差來描述速度與加速度場:  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n_n} N_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{v}_i(t)$  與  $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n_n} N_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{a}_i(t)$ , 並以網格計算每一分析步中, 粒子運動與變形狀態的改變量。其中,  $n_n$  代表網格節點數量,  $\boldsymbol{\xi}$  為自然座標 (natural coordinate)。 $N_i$ 、 $\mathbf{v}_i$  和  $\mathbf{a}_i$  分別為第  $i$  個節點的形狀函數、速度向量與加速度向量。

以第  $n$  分析步 ( $t = t_n$ , 步長  $\Delta t$ ) 為例, 分析步首先利用粒子當下的狀態資訊計算節點加速度與速度:

$$m_i \mathbf{a}_i^k = \mathbf{f}_i^{\text{int},k} + \mathbf{f}_i^{\text{ext},k} \quad (4)$$

$$m_i \mathbf{v}_i^k = \mathbf{p}_i^k \quad (5)$$

上標  $k$  代表網格在第  $n$  分析步的初始狀態。 $m_i$  稱為節點質量:

$$m_i = \int_{\Omega} \rho N_i dV \approx \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{ip} \quad (6)$$

其中  $n_p$  代表粒子數量,  $m_p$  為粒子  $p$  的質量。函數之下標  $p$  代表該函數在第  $p$  顆粒子位置的值, 例如  $N_{ip} \equiv N_i(\boldsymbol{\xi}_p)$  為  $N_i$  在第  $p$  顆粒子位置的值。 $\mathbf{f}_i^{\text{int}}$  稱為節點內力:

$$\mathbf{f}_i^{\text{int}} = - \int_{\Omega} \nabla N_i \cdot \rho \bar{\boldsymbol{\sigma}} dV \approx - \sum_{p=1}^{n_p} m_p \nabla N_{ip} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_p \quad (7)$$

其中  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} / \rho$  為比應力 (specific stress),  $\nabla N_i$  為  $N_i$  之梯度。 $\mathbf{f}_i^{\text{ext}}$  為節點外力:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i^{\text{ext}} &= \int_{\Omega} N_i \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega_\tau} N_i \boldsymbol{\tau}^* dV \\ &\approx \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{ip} \mathbf{b}_p + \int_{\partial\Omega_\tau} N_i \boldsymbol{\tau}^* dV \end{aligned} \quad (8)$$

其次, 當節點  $i$  並非座落於  $\partial\Omega_v$  時, 其節點速度及位置改變量 ( $\Delta \mathbf{v}_i$  和  $\Delta \mathbf{x}_i$ ) 為:

$$\Delta \mathbf{v}_i = \Delta t \mathbf{a}_i^k \quad (9)$$

$$\Delta \mathbf{x}_i = \Delta t (\mathbf{v}_i^k + \Delta t \mathbf{a}_i^k) \quad (10)$$

當節點  $i$  須滿足速度邊界條件  $\mathbf{v}_i^{*L}$ , 則其改變量之計算為:

$$\Delta \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^{*L} - \mathbf{v}_i^k \quad (11)$$

$$\Delta \mathbf{x}_i = \Delta t \mathbf{v}_i^{*L} \quad (12)$$

此處,  $\mathbf{v}_i^{*L} \equiv \mathbf{v}^*(\mathbf{x}_i, t_{n+1})$ 。

最終, 粒子之速度、位置和應力改變量可由網格內差而得; 對任一粒子  $p$ , 其運動狀態在第  $n$  分析步更新後變為:

$$\mathbf{v}_p(t_{n+1}) = \mathbf{v}_p(t_n) + \sum_{i=1}^{n_n} N_{ip} \Delta \mathbf{v}_i \quad (13)$$

$$\mathbf{x}_p(t_{n+1}) = \mathbf{x}_p(t_n) + \sum_{i=1}^{n_n} N_{ip} \Delta \mathbf{x}_i \quad (14)$$

材料狀態變數及應力之更新則根據粒子材料模型的不同, 由速度梯度 ( $\nabla \mathbf{v}_p = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{n_n} \nabla N_{ip} \otimes \Delta \mathbf{x}_i$ ) 或應變增量 ( $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p = \Delta t (\nabla \mathbf{v}_p)^{\text{sym}}$ ) 計算而得。

## 三、速度邊界條件之特殊模擬技術

質點法通過計算網格更新粒子的動力反應, 需在每一分析步中進行粒子與網格間的連結與資訊傳遞。為了提高計算效率, 常採用規則的網格配置。然而, 此網格選擇方式可能會影響速度邊界條件施加的精準度。針對此議題, Yang (2016) 提出了簡易且有效的速度邊界條件轉換模擬技術。此技術, 如圖 2 所示, 將速度邊界條件之邊界束制力 (如支承反力) 轉化為作用在空間中的等效重力場 (specific force

field)。

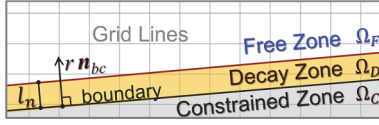


圖 2 速度邊界條件之等效重力場示意圖

Fig.2 Illustration of the equivalent specific force field for applying velocity boundary conditions

此等效重力場  $\bar{f}(\mathbf{x})$  作用於節點上並產生額外的節點邊界力，其影響隨節點與邊界距離的增加而降低。Yang (2016) 分別以遍布全域的重力場  $\bar{f}^v(\mathbf{x})$  和影響係數函數  $q(\mathbf{x})$  來描述節點束制效果以及空間衰減效應，故  $\bar{f}(\mathbf{x})$  可表示為：

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x})\bar{f}^v(\mathbf{x}) \quad (15)$$

$\bar{f}^v(\mathbf{x})$  為提供節點運動束制之重力場，不考慮節點距離造成的衰減效應。 $q(\mathbf{x})$  為介於 0 至 1 之間的函數，定義如下：

$$q(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \mathbf{x} \in \Omega_C \\ q_n(r/l_n) & , \mathbf{x} \in \Omega_D \\ 0 & , \mathbf{x} \in \Omega_F \end{cases} \quad (16)$$

其中， $q_n$  為等效重力場從完全束制至完全無影響的衰減函數。 $r$  為空間中任意一點  $\mathbf{x}$  與邊界的有號距離，表示為：

$$r = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{bc}) \cdot \mathbf{n}^{bc} \quad (17)$$

$\mathbf{x}^{bc}$  為  $\mathbf{x}$  在邊界上的投影點之位置向量， $\mathbf{n}^{bc}$  為  $\mathbf{x}^{bc}$  處之邊界向外法向量。 $l_n$  為  $\mathbf{x}^{bc}$  處的衰減層厚度，其值與網格尺寸相關；在尺寸為  $l_x \times l_y \times l_z$  的長方體網格中，其值為

$$l_n = \sqrt{(l_x n_x^{bc})^2 + (l_y n_y^{bc})^2 + (l_z n_z^{bc})^2} \quad (18)$$

其中， $n_x^{bc}$ 、 $n_y^{bc}$  和  $n_z^{bc}$  為  $\mathbf{n}^{bc}$  在  $xyz$  座標軸系統中各方向的分量。如圖 2 所示，當  $r \geq l_n$ ， $\mathbf{x} \in \Omega_F$ ；當  $r \leq 0$ ， $\mathbf{x} \in \Omega_C$ ；當  $0 < r < l_n$ ， $\mathbf{x} \in \Omega_D$ 。

針對任一節點  $i$  來說，其節點邊界力  $\mathbf{f}_i^{bc}$  即為等效重力場  $\bar{f}(\mathbf{x})$  在節點  $i$  之值與節點質量  $m_i$  之乘積：

$$\mathbf{f}_i^{bc} = m_i \bar{f}(\mathbf{x}_i) = q(\mathbf{x}_i) \mathbf{f}_i^v \quad (19)$$

此處  $\mathbf{f}_i^v = m_i \bar{f}^v(\mathbf{x}_i)$  為節點  $i$  在速度邊界條件下的束制力，其計算式會因不同的邊界條件設定而有所不同。舉例來說，在速度邊界條件  $\mathbf{v}_i^{*L}$  下，

$$\mathbf{f}_i^v = -\mathbf{f}_i^{tot,k} + \frac{m_i \mathbf{v}_i^{*L} - \mathbf{p}_i^k}{\Delta t} \quad (20)$$

其中， $\mathbf{f}_i^{tot,k} = \mathbf{f}_i^{int,k} + \mathbf{f}_i^{ext,k}$ ；在與以速度  $\mathbf{v}_i^{*k}$  移動的光滑邊界的碰撞問題中，當  $(\mathbf{v}_i^k - \mathbf{v}_i^{*k}) \cdot \mathbf{n}_i^{bc} \leq 0$ ，

$$\mathbf{f}_i^v = \left( -\mathbf{f}_i^{tot,k} + \frac{m_i \mathbf{v}_i^{*k} - \mathbf{p}_i^k}{\Delta t} \right) \cdot \mathbf{n}_i^{bc} \mathbf{n}_i^{bc} \quad (21)$$

讀者可參考 Yang (2016) 之文獻以獲得更多的節點邊界力之案例。

當使用此速度邊界模擬技巧，式 (4) 中將新增額外的節點邊界力：

$$m_i \mathbf{a}_i^k = \mathbf{f}_i^{int,k} + \mathbf{f}_i^{ext,k} + \mathbf{f}_i^{bc} \quad (22)$$

而在計算節點速度及位置改變量 ( $\Delta \mathbf{v}_i$  和  $\Delta \mathbf{x}_i$ ) 時，僅須使用式 (9) 和 (10)，無須再考慮速度邊界的影響。

## 四、梁柱元素與質點法的耦合

本研究將梁柱元素視為質點法計算網格之速度邊界條件，採用等效重力場的技巧計算節點邊界力  $\mathbf{f}_i^{bc}$ ，用以更新粒子代表的連續體之運動行為。同時，將節點對梁柱元素施加的集中載重（即對應於  $\mathbf{f}_i^{bc}$  之反作用力）轉化成等效元素端點力，利用有限元素法的分析技術，計算梁柱元素所組成之結構構架模型之自由度改變量。為方便說明，本文以二維問題為例，分別介紹梁柱桿件產生之節點邊界力與梁柱結構更新的演算過程，然而此方法亦適用於三維問題。

### 1. 梁柱桿件產生之節點邊界力

如圖 3 所示，梁柱元素以線段簡化桿件之幾何形狀，利用梁理論避免於數值模型中模擬完整斷面的需求。基於斷面平面保持平面，以及斷面與桿件縱軸之夾角保持不變之理論基本假設，式 (17) 之有號距離  $r$  的計算調整為

$$r = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^M) \cdot \mathbf{n}^{bc} - h^M \quad (23)$$

以準確模擬梁柱桿件表面與連續體的碰撞行為。式 (23) 中， $\mathbf{x}^M$  代表  $\mathbf{x}$  在梁柱元素上的投影點之位置向量， $h^M$  為梁柱元素從  $\mathbf{x}^M$ 、沿  $\mathbf{n}^{bc}$  方向至桿件表面的距離。

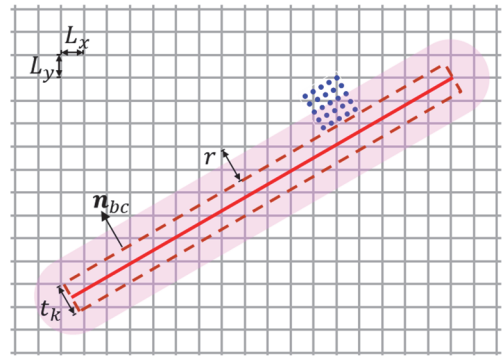


圖 3 質點法計算網格中代表梁柱元素之等效重力場示意圖

Fig.3 Illustration of an equivalent specific force field for a beam-column element in computational grids of the material point method

除此之外，考量在梁柱桿件斷面較小的狀況下，含粒子資訊、節點質量不為零之計算網格節點，有可能與模擬之連續體座落於元素不同側。由於對於任一用於粒子更新的節點  $i$ ，其對應的向外表面法向量  $\mathbf{n}_i^{bc}$  應滿足

$$(\bar{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i^M) \cdot \mathbf{n}_i^{bc} > 0 \quad (24)$$

其中

$$\bar{\mathbf{x}}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{ip} \mathbf{x}_p \quad (25)$$

故若計算之法向量不滿足上述不等式，該向量須乘上一個負號做修正，方為正確的  $\mathbf{n}_i^{bc}$ 。

在依序計算出節點  $i$  對應的梁柱元素投影點  $\mathbf{x}_i^M$ 、向外法向量  $\mathbf{n}_i^{bc}$  以及有號距離  $r_i$  後，便可依第三節所述，完成節點邊界力和節點加速度的計算。投影點之搜尋以及法向量之計算皆於梁柱元素之局部座標軸系統中進行，相關細節詳附錄。

## 2. 梁柱結構更新

梁柱元素對計算網格產生作用力的同時，計算網格亦以大小相同的力反向施加於元素之上。此梁柱元素中的集中載重，依有限元素法的標準流程，轉化成等效元素端點力，累加於構架模型的節點上。

結構構架模型的控制方程式為：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (26)$$

$\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{K}$  和  $\mathbf{f}$  分別代表結構構架系統的質量、勁度和外力矩陣。 $\mathbf{d}$  為系統自由度矩陣，矩陣上的一個點代表對時間的一次微分，故  $\ddot{\mathbf{d}}$  代表系統自由度的二階導數。 $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{K}$  矩陣係分別由元素之質量和勁度矩陣組裝 (assemble) 而成，當結構構架之預期變形與位移較小時，可於僅組裝一次，不需更新；當模擬問題本身具較大的變形和位移時， $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{K}$  矩陣需於每一分析步重新計算，以反應幾何與材料上的非線性特性。讀者可參考有限元素法或結構動力分析相關文獻，例如 Cook et al. (2001)，以獲得更進一步的細節。

本研究採用與質點法一致的時間數值積分進行結構構架的動力反應更新。演算流程第一步為計算構架自由度在計算網格作用下的二階導數：

$$\ddot{\mathbf{d}}^k = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}^G - \mathbf{K}\mathbf{d}(t_n)) \quad (27)$$

此處， $\mathbf{f}^G$  代表計算網格導致的作用力矩陣。其次，自由度一階導數與自由度矩陣分別更新為

$$\dot{\mathbf{d}}(t_{n+1}) = \dot{\mathbf{d}}(t_n) + \Delta t \ddot{\mathbf{d}}^k \quad (28)$$

$$\mathbf{d}(t_{n+1}) = \mathbf{d}(t_n) + \Delta t \dot{\mathbf{d}}(t_{n+1}) \quad (29)$$

最終，將  $\dot{\mathbf{d}}(t_{n+1})$  與  $\mathbf{d}(t_{n+1})$  回傳給各梁柱元素，以更新元素的材料狀態參數和端點的自由度與位置。

## 五、演算法驗證：簡支梁振動反應

本數值試驗旨在驗證新提出的接觸演算法的準確性，數值分析結果將利用數學模型之解析解進行比較驗證。如圖 4(a) 所示，本數值試驗設定一簡支梁受到自由落下之矩形物體衝擊而產生振動，且落下之物與梁碰撞後便黏合在一起，不再分離。矩形物體邊長為 0.25 m，密度  $\rho_{obj}$  為 960 kg/m<sup>3</sup>，體積模數  $K_{obj}$  為 3 MPa，剪力模數  $G_{obj}$  為 0.6 MPa。簡支梁長度  $L_b$  為 5.0 m，梁厚  $b_b$  為 0.05m，梁深  $h_b$  為 0.25m，密度  $\rho_b$  為 10<sup>4</sup> kg/m<sup>3</sup>，楊氏模數  $E_b$  為 0.17 GPa。重力加速度  $g$  為 10 m/sec<sup>2</sup>。矩形物體與梁初始處於靜止狀態，兩者間之距離  $d_{o-b}$  為 0.75 m。

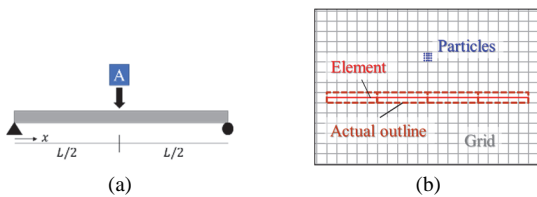


圖 4 簡支梁振動問題以及數值模型設定示意圖

Fig.4 Illustration of the initial state of an impact-induced vibrating simply supported beam and its numerical model setup

數值模型中，設定為平面應力二維問題，計算網格採 0.25 m × 0.25 m 之規則矩形網格 (如圖 4(b) 所示)。矩形物體以 4 × 4 顆粒子均勻離散，粒子面積為單一網格面積之 16 分之 1。簡支梁以梁柱元素模擬，與網格節點接觸時設定為單純的速度邊界，以式 (20) 計算節點邊界力。本次試驗考慮有 1、2、4、8 四種元素個數進行梁的離散。時間步長  $\Delta t$  採 10<sup>-4</sup> sec，總模擬時間為 5.0 sec。

數學模型中，由於矩形塊尺寸遠小於梁之長度，故將矩形塊簡化為梁中央的集中質量，矩形塊的重量為梁中央的集中力，且僅考慮簡支梁之第一自然振動模態： $\psi(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$ 。在此理想之假設下，梁中央之位移  $u_{bM}(t)$  可表示為：

$$u_{bM}(t) = \frac{m_{obj}g}{k_\psi} \left( 1 - \cos \sqrt{\frac{k_\psi}{m_{obj} + m_\psi}} t \right) + \frac{m_{obj}}{m_\psi + m_{obj}} \frac{\sqrt{2gd_{o-b}}}{\omega_\psi} \sin \left( \sqrt{\frac{k_\psi}{m_{obj} + m_\psi}} t \right) \quad (30)$$

式中， $m_{obj}$  為矩形塊之總質量， $m_\psi = 0.5\rho_b h_b b_b L_b$  和  $k_\psi = \frac{\pi^4 E_b b_b h_b^3}{24L_b^3}$  為簡支梁第一自然振動模態下的等效單自由度系統之質量與勁度。

圖 5 比較採用不同梁柱元素數量下的簡支梁中點歷時反應。由圖可知，當採用兩個以上的元素數量進行模擬，簡支梁之中點反應與式 (30) 算得之理論解相吻合。由此可驗證本研究提出之質點法與梁柱元素間之接觸演算法之準確性。

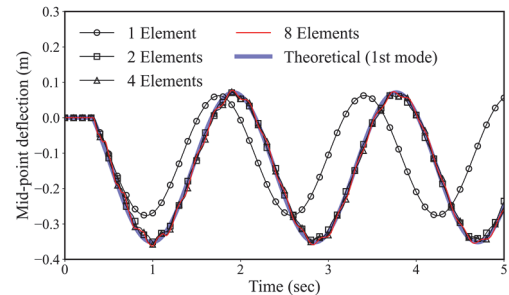


圖 5 簡支梁中點位移歷時反應比較：不同數量梁柱元素下質點法分析結果與解析解之對比

Fig.5 Comparison of displacement time histories at the midpoint of a simply supported beam impacted by a block: numerical results for varying numbers of beam-column elements versus analytical solution

## 六、演算法適用性測試：兩端固定梁振動反應

本數值試驗旨在更進一步探討採用梁柱元素於質點法分析的優勢與限制，以及測試接觸演算法在大變形問題中的效果。如圖 6 所示，本數值試驗設定一兩端固定之梁受到自由落下之圓形物體衝擊而產生振動，落下之物與梁碰撞後可自由反彈分離。





圖 6 兩端固定梁振動問題設定示意圖

Fig.6 Illustration of the initial state of an impact-induced vibrating fixed-end beam

圓形物體半徑為 0.25 m，密度  $\rho_{obj}$  為  $960 \text{ kg/m}^3$ ，體積模數  $K_{obj}$  為 3 MPa，剪力模數  $G_{obj}$  為 0.6 MPa。梁之長度  $L_b$  為 2.5 m，梁厚  $b_b$  為 1 m，密度  $\rho_b$  為  $500 \text{ kg/m}^3$ ，楊氏模數  $E_b$  為 20.4 MPa，柏松比  $\nu_b$  為 0.31。重力加速度  $g$  為  $10 \text{ m/sec}^2$ 。圓形物體初始以  $10 \text{ m/sec}$  的速度靠近處於靜止狀態的梁，兩者間之距離  $d_{o-b}$  為 0.25 m。

本試驗考慮 0.5 m、0.25 m、0.125 m 和 0.0625 m 等四種不同的梁深  $h_b$ ，其細長比分別為 0.2、0.1、0.05 和 0.025。此設定旨在觀察不同梁深下，不同模擬方法所給予之梁應力分布狀態，以及不同變形量下演算法的適用性。

數值模型中，設定為平面應力二維問題，計算網格採  $0.25 \text{ m} \times 0.25 \text{ m}$  之規則矩形網格。圓形物體以 208 顆粒子均勻離散，粒子面積為單一網格面積之 64 分之 1。如圖 7 和 8 所示，梁分別採用粒子與梁柱元素兩種方式模擬。梁之粒子面積為單一網格面積之 16 分之 1。時間步長  $\Delta t$  採  $10^{-4} \text{ sec}$ ，總模擬時間為 0.2 sec。

圖 9 和 10 所示，分別為各模型中，梁之頂部表面中點處之位移以及馮米賽斯 (von Mises) 應力歷時。由圖 9 可見，相較於梁柱元素之分析結果，利用粒子模擬梁之最大位移反應較為接近；當細長比從 0.2 降至 0.025，最大位移分別約為 0.075 m、0.18 m 和 0.29 m 和 0.28 m。採用梁柱元素之分析結果則是分別為 0.056 m、0.19 m 和 0.58 m。(如圖 11 所示，細長比 0.025、採用梁柱元素之模型，因變形較大，梁從側邊夾擠圓形物體，產生非此數值試驗感興趣之行為，故不列入討論。)若以單自由度系統簡化此梁，單自由度系統之勁度應與  $h_b^3$  成正比。因圓形物體在不同模型中之動能一致，故以動能轉化為單自由度的彈簧能來概估，最大位移約與  $h_b^{-1.5}$  成正比。以此看來，採梁柱元素模擬之梁反應較之以粒子模擬之結果貼近真實。此現象歸咎於計算網格之線性形狀函數，因其無法正確模擬撓曲變形，導致產生額外的、非物理性的撓曲勁度。此數值缺陷即為有限元素法中的剪切鎖定 (shear locking)。梁柱元素基於梁理論發展出來，故能準確模擬撓曲變形，沒有剪切鎖定的問題。

除此之外，由圖 9、細長比為 0.2 的位移歷時圖中可以看到，以粒子模擬的梁在 0.16 秒左右產生了不自然的停滯反應。此種現象來自質點法邊界網格處的數值不穩定，且在應力反應中更為明顯。由圖 10、細長比為 0.2 的馮米賽斯 (von Mises) 應力歷時圖中可以看到，以粒子模擬的梁在 0.16 秒左右有數值不穩定產生的、不符合物理現象的應力脈衝。此現象通常影響的時間較短，且其影響會在粒子離開網格交界處而消失，多數時候不會影響物體的整體位移反應，例如細長比為 0.025 的案例中，粒子模擬的梁在 0.04 秒左右的應力脈衝，便未對梁之位移反應產生明顯的影響。相較於此數值不穩定產生的偶發性的應力脈衝，質點法中因網格之線

性形狀函數導數的不連續，導致粒子在網格間移動時產生明顯的數值誤差 (cell-crossing error)，更常嚴重影響所得應力場的準確性。例如圖 10、細長比為 0.2 的馮米賽斯應力歷時圖中可以看到，以粒子模擬的梁在 0.18 秒左右產生的應力不連續反應。梁柱元素基於梁理論，利用梁端自由度計算梁內應力與應變，故能避免此些數值上的誤差。

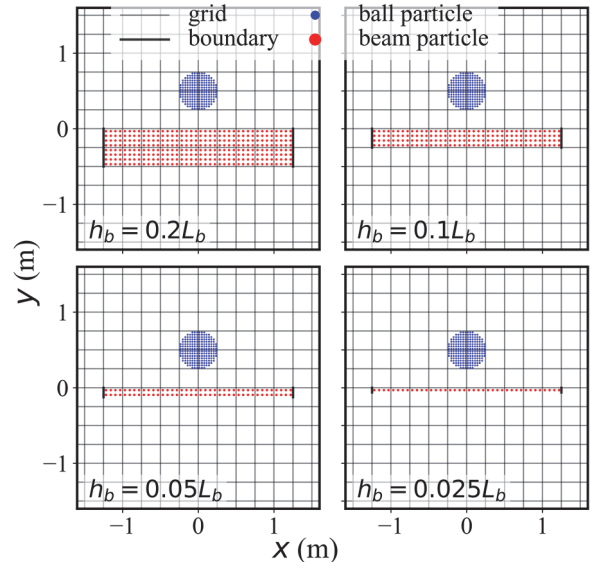


圖 7 兩端固定梁振動問題中以粒子模擬梁之數值模型設定  
Fig.7 Illustration of numerical model setups with particle-represented beams in a fixed-end beam vibration problem

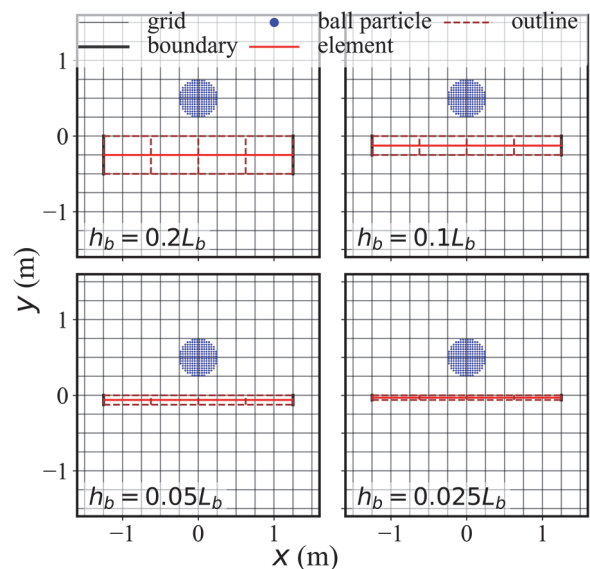


圖 8 兩端固定梁振動問題中以梁柱元素模擬梁之數值模型設定

Fig.8 Illustration of numerical model setups with beam-column elements in a fixed-end beam vibration problem

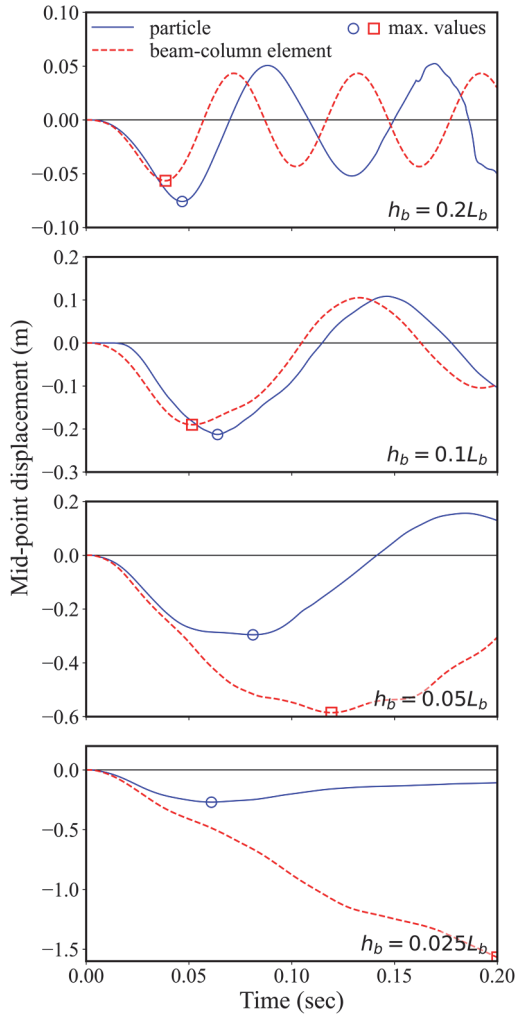


圖 9 兩端固定梁中央頂部表面之位移歷時圖  
**Fig.9 Time histories of displacement at the midpoint of the top surface of beams with fixed ends**

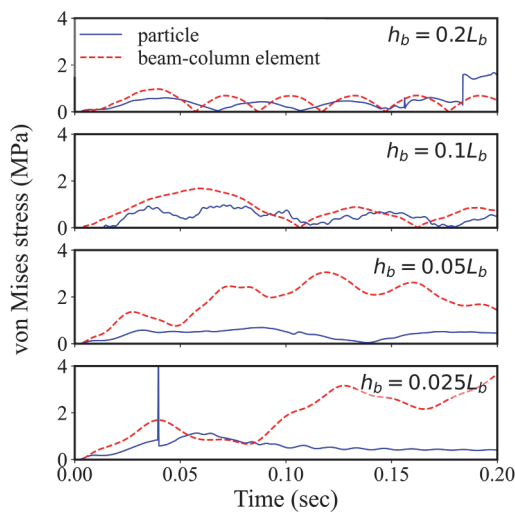


圖 10 兩端固定梁中央頂部表面之馮米賽斯應力歷時圖  
**Fig.10 Time histories of von Mises stress at the midpoint of the top surface of beams with fixed ends**

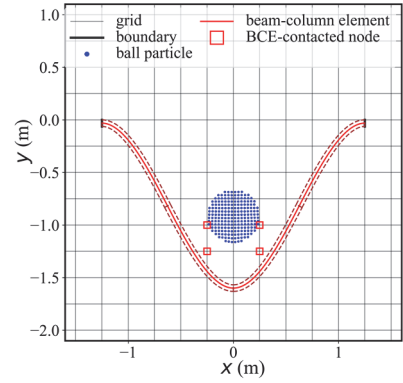


圖 11 細長比 0.025、採用梁柱元素模擬之兩端固定梁在  $t = 0.2$  秒時之變形反應。

**Fig.11 The deformation response of a fixed-end beam, simulated using beam-column elements with a slenderness ratio of 0.025, at  $t = 0.2$  seconds**

圖 12 為細長比 0.1 的梁，分別以粒子與梁柱元素模擬下，在產生最大橫向位移時之應力分布圖。比較圖 12(a) 與 (b) 可觀察到，利用梁柱元素確實可以得到解析度較高的正向應力場，且不似粒子模擬之梁，不會產生剪切鎖定之剪應力分布狀況。然而利用梁柱元素之分析結果，亦不會出現梁理論未考慮的反應，例如梁上層表面因圓形物體的接觸而產生之垂直方向的正向應力  $\sigma_{yy}$ ，或碰撞產生的應力波。

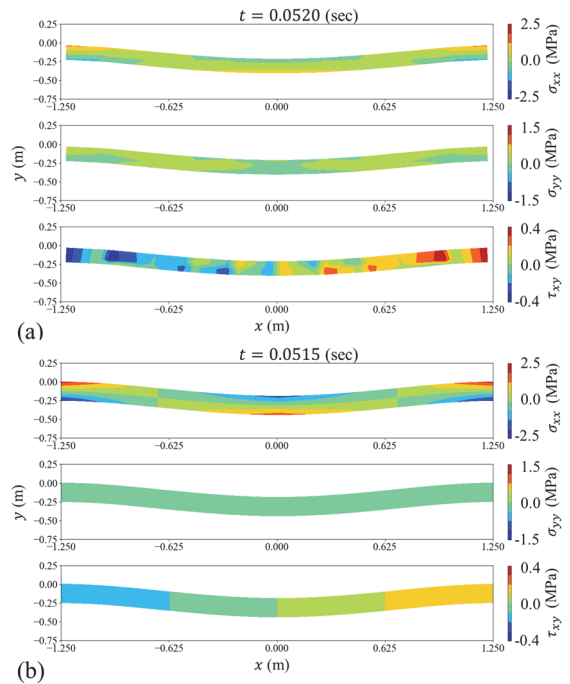


圖 12 細長比 0.1 之兩端固定梁在最大橫向位移時之應力分布圖：(a) 粒子模擬之梁和 (b) 梁柱元素模擬之梁  
**Fig.12 Stress distribution in fixed-end beams with a slenderness ratio of 0.1 under maximum deflection**

圖 13 呈現各模型的分析時間。因梁之粒子總數，(如圖 7 所示) 隨細長比的減少而減少，故分析時間亦隨之減少。相較之下，本試驗在不同細長比的問題中，維持使用四個梁

柱元素進行模擬，分析時間理應相似。然從圖 13 可以觀察到，採用梁柱元素時，細長比 0.2 與 0.1 的分析中，所用時間基本上保持一致；細長比 0.05 時，分析時間略為增加；細長比 0.025 時，分析時間則明顯增加。此現象暗示目前採用的投影點計算技巧在梁產生大變形、大位移時，計算效率較差。

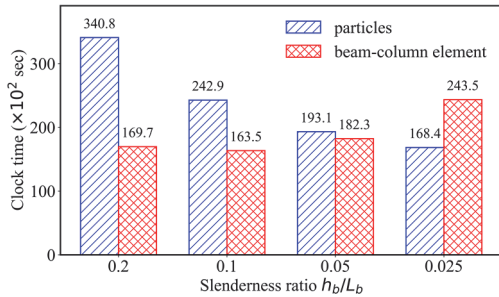


圖 13 兩端固定梁振動問題分析時間比較圖

Fig.13 Comparison of computational times for fixed-end beam vibration problems

總結來說，梁柱元素立基於梁理論的數學模型上，在符合數學模型的假設下，其計算撓曲與軸向變形所造成的應力之效率與精準度，自然優於任何以連續體為目標、以空間離散的技巧推導出來的元素。本數值試驗中採用的質點法計算網格元素，相當於有限元素法中的雙線性四邊形元素 (bilinear quadrilateral element)，其在模擬梁的撓曲應力時，橫向 (梁深方向) 的元素個數最少須為兩個 (如圖 7 左上、細長比為 0.2 之模型所示)，一般在八層元素以上，以獲得合理的應力分析結果。圖 13 顯示在滿足最低的兩層元素個數的需求下，利用梁柱元素已可節省約兩倍的計算時間。換言之，若欲獲得合理的、可用於設計的撓曲應力精準度的狀況下，使用梁柱元素會比使用粒子模擬梁，明顯來的有效率。

## 七、結 論

質點法能模擬出合理的物體運動，以及處理複雜的物體接觸問題。本研究提出梁柱元素與質點法之接觸演算法，透過採用結構元素，增加結構桿件應力計算的精準性，故能增加質點法於工程設計上的實用性。本研究將梁柱元素視為質點法計算網格之速度邊界條件，並利用 Yang (2016) 所提出的等效重力場的技巧，計算元素對網格節點作用之邊界力，用以更新質點法中粒子的運動。節點邊界力之反作用力即為網格節點對梁柱元素施加的集中外力，可透過有限元素法之分析流程更新元素組成之梁柱構架系統之運動狀態。本研究採用兩個梁受物體撞擊產生振動的二維問題，驗證與測試新提出之接觸演算法，並探討使用梁柱元素分析的優劣勢。研究主要發現總結如下：

- 新提出的演算法能使梁柱元素相容於質點法之計算之中，產生正確的位移反應。
- 在梁柱元素歷經大變形與大位移時，採用牛頓法的投影點搜尋計算效率會明顯的下降。
- 採用梁柱元素可以避免剪切鎖定 (shear locking)，並增強

桿件內部應力場之解析度。

- 在產生相同的撓曲應力分析精準度下，採用梁柱元素會遠比使用粒子模擬結構桿件來的有效率。
- 未來研究可進一步發展更穩定有效之投影點演算技術，並以真實試驗資料進行接觸演算法與質點法之驗證。

## 參考文獻

- [1] 林德貴、黃郁博、邱雅筑 (2023)，「鋼構防砂壩承受土石流作用力之力學分析」，中華水土保持學報，54(2)，91-107。(Lin, D.G., and Huang, Y.P., and Chiu, Y.C. (2023). "Mechanical Analysis of Steel Check Dam Subjected to Loading of Debris Flow." *Journal of Chinese Soil and Water Conservation*, 54(2), 91-107. (in Chinese))
- [2] 楊國鑫、彭逸蘋、郭治平、李威霖、汪俊彥、陳昭維、朱世文、白朝金 (2023)，「以物質點法探討光華崩塌地滑動面深度與地下水之影響」，中華水土保持學報，54(3)，185-196。(Yang, K.H., Peng, Y.P., Kuo, C.P., Lee, W.L., Wang, J.Y., Chen, C.W., Chu, S.W., and Pai, C.C. (2023). "Investigation of Failure Surface Depth and Groundwater Effects in Guanghua Landslide through Material Point Analysis." *Journal of Chinese Soil and Water Conservation*, 54(3), 185-196. (in Chinese))
- [3] 賴宜群 (2020)，「Anura3D 質點法探討國道三號 3.1K 邊坡破壞歷程」，國立臺灣大學土木工程學系碩士論文。(Lai, Y.C. (2020). *Post-failure Simulation of Freeway No.3 3.1K Landslide in Taiwan Using MPM Code Anura3D*, Master Thesis, National Taiwan University, Taiwan, ROC. (in Chinese))
- [4] Abe, K., and Konagai, K. (2016). "Numerical simulation for runout process of debris flow using depth-averaged material point method." *Soils and Foundations*, 56(5), 869-888.
- [5] Brackbill, J.U., Kothe, D.B., and Ruppel, H.M. (1988). "FLIP: A low-dissipation, particle-in-cell method for fluid flow", *Computer Physics Communications*, 48 (1), 25-38.
- [6] Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., and Witt, R. J. (2001). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis* (4th ed.). Wiley.
- [7] Ng, C.W.W., Jia, Z., Poudyal, S., Bhatta, A., and Liu, H. (2023). "Two-phase MPM modelling of debris flow impact against dual rigid barriers." *Géotechnique*.
- [8] Sulsky, D., Zhou, S.J., and Schreyer, H.L. (1995). "Application of a Particle-in-Cell Method to Solid Mechanics." *Computer Physics Communications*, 87(1-2), 236-252.
- [9] Yang, W.C. (2016). *Study of Tsunami-Induced Fluid and Debris Load on Bridges Using the Material Point Method*, Ph.D. Dissertation, University of Washington, USA.
- [10] Yerro, A. (2015). *MPM modelling of landslides in brittle and unsaturated soils*, Ph.D. Dissertation, Universitat Politècnica de Catalunya, Spain.

2024 年 01 月 22 日 收稿

2024 年 03 月 21 日 修正

2024 年 06 月 29 日 接受

## 附錄、投影點與法向量之演算

本研究透過牛頓法計算梁柱元素上距節點  $i$  最近的點，也就是投影點  $\mathbf{x}'_i$ ，並進而計算法向量  $\tilde{\mathbf{n}}_i^{bc}$ 。 $\tilde{\mathbf{n}}_i^{bc}$  需經過式 (24) 之判別以獲得法向量  $\mathbf{n}_i^{bc}$ 。

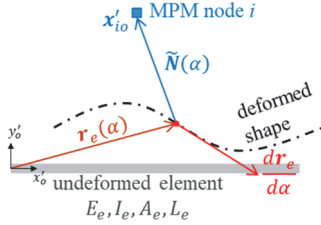


圖 A.1 投影點計算示意圖

Fig.A.1 Schematic diagram of projection point calculation

如圖 A.1 所示，投影點的計算係在各梁柱元素之局部座標軸系統中進行。圖中虛線為元素變形後的曲線。 $\mathbf{x}'_{i0}$  為節點  $i$  在局部座標軸系統中之位置。紅色實心圓為測試點，此點沿元素變形曲線的位置向量  $\mathbf{r}_e$  在  $x'_0 y'_0 z'_0$  座標軸系統下可表示為：

$$\mathbf{r}_e(\alpha) = [\alpha + u(\alpha), v(\alpha), 0.0] \quad (\text{A.1})$$

其中  $u(\alpha)$  和  $v(\alpha)$  分別為梁在  $\alpha$  處的軸向和橫向位移， $0 \leq \alpha \leq L_e$ 。 $\mathbf{r}_e(\alpha)$  對  $\alpha$  的微分即為該點的切線向量：

$$\tilde{\mathbf{T}}(\alpha) = \frac{d\mathbf{r}_e}{d\alpha} = \left[ 1 + \frac{du}{d\alpha}, \frac{dv}{d\alpha}, 0.0 \right] \quad (\text{A.2})$$

其長度為

$$l_{Tn} = \|\tilde{\mathbf{T}}(\alpha)\| \quad (\text{A.3})$$

將節點位置扣除測試點位置，可得距離向量

$$\tilde{\mathbf{N}}(\alpha) = \mathbf{x}'_{i0} - \mathbf{r}_{x'_0}(\alpha) \quad (\text{A.4})$$

其長度為

$$l_{Nn} = \|\tilde{\mathbf{N}}(\alpha)\| \quad (\text{A.5})$$

若此測試點為  $\mathbf{x}'_{i0}$  在元素上之投影點， $\tilde{\mathbf{T}}(\alpha)$  和  $\tilde{\mathbf{N}}(\alpha)$  之夾角應為直角，代表  $\tilde{\mathbf{T}}(\alpha) \cdot \tilde{\mathbf{N}}(\alpha) = 0$ 。

本研究定義函數

$$f_n(\alpha) = \frac{\tilde{\mathbf{T}}(\alpha) \cdot \tilde{\mathbf{N}}(\alpha)}{l_{Tn} \cdot l_{Nn}} \quad (\text{A.6})$$

並以牛頓法求得  $f_n(\alpha) = 0$  之解。令  $\alpha_{tr}^n$  為  $n$  次迭代中所採用的  $\alpha$  之值 (下標  $tr$  表示此為測試值)，且以  $\mathbf{x}'_{i0}$  的  $x'_0$  分量作為初始值： $\alpha_{tr}^0 = x'_{i0x}$ 。

在第  $n$  次迭代中，若距離向量的長度  $l_{Nn}$  為零 (或小於誤差容許值  $tol$ )，代表元素之變形曲線經過節點  $i$ ，故無需再搜尋投影點。若  $l_{Tn} \geq tol$ ，其單位法向量為

$$\tilde{\mathbf{n}}(\alpha_{tr}^n) = [0, 0, 1] \times \frac{\tilde{\mathbf{T}}(\alpha_{tr}^n)}{l_{Tn}} \quad (\text{A.7})$$

若  $l_{Tn} < tol$ ，代表梁僅於軸向移動與變型，故其單位法向量為

$$\tilde{\mathbf{n}}(\alpha_{tr}^n) = [0, 1, 0] \quad (\text{A.8})$$

若  $l_{Nn}$  不為零 (或不小於誤差容許值  $tol$ )，則需搜尋  $\mathbf{x}'_{i0}$  於變形曲線上之投影點。若  $l_{Tn} \geq tol$ ，則以  $|f_n(\alpha'_{tr,n})| \leq tol$  判別測試點是否為投影點；若  $l_{Tn} < tol$ ，則以  $|\tilde{N}_x| \leq tol$  判別，此處  $\tilde{N}_x$  代表  $\tilde{\mathbf{N}}(\alpha_{tr}^n)$  在  $x'_0$  方向之分量。當測試點為投影點，單位法向量為

$$\tilde{\mathbf{n}}(\alpha_{tr}^n) = \frac{\tilde{\mathbf{N}}(\alpha_{tr}^n)}{l_{Nn}} \quad (\text{A.9})$$

若否，則更新  $\alpha$  之測試值並進入下一步的迭代流程：

$$\alpha_{tr}^{n+1} = \alpha_{tr}^n - \frac{f_n(\alpha_{tr}^n)}{f'_n(\alpha_{tr}^n)} \quad (\text{A.10})$$

其中  $f'_n(\alpha)$  為  $f_n(\alpha)$  對  $\alpha$  的一次微分。